ISOMÉTRIES DU PLAN AFFINE EUCLIDIEN

MARIE-CLAUDE DAVID

Voici un cours sur les isométries du plan avec des figures et des exercices interactifs. L'étude des isométries et des similitudes du plan complexe est l'objet du document WIMS : Géométrie du plan complexe.

Avertissement. Ce cours est une partie de l'option de géométrie enseignée de 2013 à 2015 au premier semestre de la première année de licence MPI à la Faculté des Sciences d'Orsay de l'université Paris Sud. Il s'agissait de pallier l'absence des transformations au Lycée. L'ordre de ce document ne correspond pas à l'ordre du cours.

Merci à Chantal Causse pour les figures illustrant la définition de chaque type d'isométrie.

Merci à Daniel Perrin pour ses suggestions quant à une présentation adaptée des résultats généraux sur les isométries et leur classification.

TABLE DES MATIÈRES

1.	Applications du plan affine	2
1.1.	Applications	2
1.2.	Isométries	3
1.3.	Composition, inverse, involution	4
2.	Exemples d'isométries	4
2.1.	Translation	4
2.2.	Symétrie centrale	5
2.3.	Réflexion	7
2.4.	Symétrie glissée	8
2.5.	Rotation	10
3.	Isométries et angles	13
3.1.	Translations et symétries centrales	13
3.2.	Réflexion	13
3.3.	Exercices	15
4.	Droites invariantes par des isométries	15
4.1.	Translation	15
4.2.	Symétrie centrale	15
4.3.	Réflexion	16
4.4.	Symétrie glissée	16
4.5.	Rotation	16
5.	Composées d'isométries	16
5.1.	Groupe des translations et symétries centrales	16

5.2. Composée de deux réflexions 19
5.3. Composée d'une réflexion et d'une translation 20
5.4. Principe de conjugaison 21
6. Décomposition en produit de réflexions. 22
6.1. Théorème 23
6.2. Remarque 23
6.3. Application 24
7. Classification 25
7.1. Groupe 25
7.2. Groupe des isométries 26
7.3. Isométries et angles orientés 26
7.4. Caractérisation des isométries 27
8. Faisons agir des isométries 27
8.1. Frises et isométries 28
8.2. Polygones et isométries 28
8.3. Pavage et isométries 28

1. APPLICATIONS DU PLAN AFFINE

Nous commençons avec quelques notions qui posent le cadre de cette étude.

1.1. **Applications.** Vous connaissez les fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle. Elles associent à un nombre réel un autre nombre réel par une formule ou un autre moyen. Certaines sont définies seulement sur une partie de $\mathbb{R}$.

Nous allons étudier des **applications** du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

Définition 1.1. Une *application* ϕ associe à chaque point M de $\mathcal{P}$ un point $M' = \phi(M)$. Chaque point du plan a une et une seule image.

Pour des détails sur la notion d'application consultez le document WIMS : Fonctions, applications.

De plus les applications que nous étudierons seront **bijectives** :

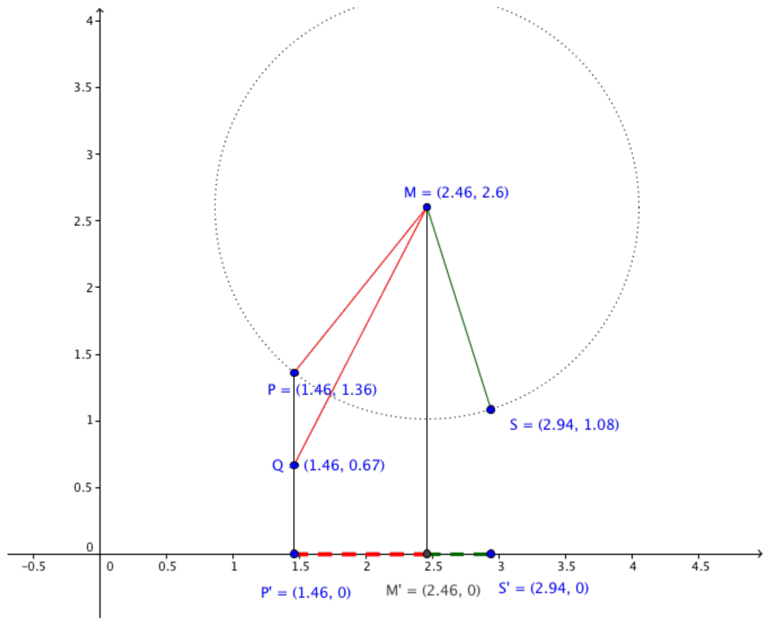
Définition 1.2. Par une application *bijective*, chaque point du plan a un et un seul antécédent. L'*inverse* ϕ^{-1} de ϕ est l'application qui à $M' = \phi(M)$ associe M. C'est le retour à la position initiale.

Comme au lycée, nous dirons souvent *transformation* pour une application bijective du plan.

1.1.1. *Exemple de la projection.* Par contre, la projection orthogonale sur une droite n'est pas bijective et ne conserve pas les distances.

Définition 1.3. Dans le plan affine euclidien, on considère une droite $\mathcal{D}$. On appelle *projection orthogonale sur* $\mathcal{D}$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à M associe le point M' intersection de $\mathcal{D}$ et de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. On dit que M' est le *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$.

Sur la figure, la droite $\mathcal{D}$ est l'axe des abscisses. Les longueurs MP et MS sont égales mais $M'S'$ est strictement inférieur à $M'P'$. On voit aussi que $[MP]$ et $[MQ]$ ont même projeté $[M'P']$.



1.1.2. *Points fixes.*

Définition 1.4. On dit qu'un point C est *fixe* par une application ϕ s'il vérifie $\phi(C) = C$.

Tous les points de l'axe des abscisses sont fixes par la projection de l'exemple précédent.

1.2. **Isométries.** Dans ce document, nous nous intéressons aux applications qui conservent les longueurs.

Définition 1.5. On dit qu'une application ϕ du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même est une *isométrie* si elle conserve les longueurs, c'est-à-dire si l'on a, pour tous points A et B dans $\mathcal{P}$, $\phi(A)\phi(B) = AB$.

Proposition 1.1. *Une isométrie transforme trois points alignés en trois points alignés dans le même ordre.*

En particulier, une isométrie conserve les milieux.

Démonstration. On rappelle l'inégalité triangulaire :

Soient A, B et C trois points du plan. On a l'inégalité triangulaire :

$$AC \leq AB + BC$$

L'égalité $AC = AB + BC$ vaut si et seulement si les trois points sont alignés avec B entre A et C.

Soient trois points A, B et C alignés et A', B' et C' leurs images respectives par une isométrie ϕ. De $AC = AB + BC$, on déduit, puisque ϕ est une isométrie,

$A'C' = A'B' + B'C'$. Donc A', B' et C' sont alignés dans le même ordre que A, B et C.

Le milieu M de $[AC]$ est l'unique point vérifiant $AC = AM + MC$ et $AM = MC$. Son image M' par ϕ vérifie $A'C' = A'M' + M'C'$ et $A'M' = M'C'$, c'est donc le milieu de $[A'C']$. □

1.3. **Composition, inverse, involution.**

Définition 1.6. Si ϕ et ψ sont deux applications de $\mathcal{P}$ dans lui-même, la *composée* $\phi \circ \psi$ est l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à un point M associe le point $\phi(\psi(M))$ image de $\psi(M)$ par ϕ.

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (\phi \circ \psi)(M) = \phi(\psi(M))$$

On sera attentif au fait qu'on applique d'abord l'application qui est à droite du symbole $\circ$ *de composition.*

Remarques.

(1) On note Id l'application identité du plan. Alors, pour toute application ψ du plan, on a : $\psi \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \psi = \psi$.

(2) L'inverse ϕ^{-1} d'une application bijective ϕ vérifie $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}$.

(3) On montre facilement que la composée de deux isométries est encore une isométrie.

Définition 1.7. On appelle *involution* une application ψ, différente de l'identité, qui est son propre inverse pour la loi de composition, c'est-à-dire que ψ vérifie $\psi \circ \psi = \mathrm{Id}$.

On dit aussi que ψ est *involutive*.

2. Exemples d'isométries

Les exemples donnés ici recouvrent tous les types d'isométries comme nous le verrons dans la partie 7

2.1. **Translation.**

Au collège, les translations via les parallélogrammes permettaient de définir les vecteurs, ici on suppose donnés les vecteurs. On peut trouver les propriétés caractéristiques du parallélogramme utiles à l'étude des translations dans *Droites remarquables, transformations* à cette adresse WIMS : Parallélogramme.

2.1.1. *Définition.*

Définition 2.1. On appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$ l'application du plan affine $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à un point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.

Sur la figure, le F vert est l'image du F bleu par une translation de vecteur u. *Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.* La figure est accessible par ce lien `http://ggbm.at/z7aLIS1x`

2.1.2. *Propriétés et exercices.*

Proposition 2.1. *Voici des propriétés d'une translation. D'autres seront établies plus loin.*

(1) Une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul n'a pas de points fixes. La translation de vecteur nul est l'identité.

(2) L'inverse de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

(3) Une translation est une isométrie.

(4) Soient A et B deux points distincts et A' et B' leurs images respectives par la translation de vecteur $\vec{u}$. L'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\vec{u}$ est la droite $(A'B')$. Elle est parallèle à (AB).

(5) Une translation transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Démonstration. 1. Un point M est fixe par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si on a $\vec{u} = \vec{0}$, puisque par définition $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur de la translation. Ainsi, seule la translation de vecteur nul admet des points fixes et tout point est fixe par la translation de vecteur nul qui est l'identité.

2. L'inverse de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$ puisqu'on a, pour tout M du plan, $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.

3. On pose $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$, alors on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

Le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme donc on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. On en déduit : $A'B' = AB$, donc $t_{\vec{u}}$ est une isométrie.

4. Comme $t_{\vec{u}}$ est une isométrie, l'image de la droite (AB) par la translation $t_{\vec{u}}$ est contenue dans la droite $(A'B')$. De même on a : $t_{-\vec{u}}(A'B') \subset (AB)$. L'image de (AB) par $t_{\vec{u}}$ est donc la droite $(A'B')$ qui lui est parallèle, en effet les vecteurs directeurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux (cf (3)).

5. résulte de 4. □

Remarque. La conservation des angles orientés par une translation est démontrée en 3.1 et les droites invariantes par une translation sont explicitées en 4.1.

Exercices. Toutes les propriétés des translations sont utiles pour faire ces exercices. Les trois premiers exercices présentent des données graphiques.

WIMS : Images de deux points par une translation

WIMS : Triangles translatés

WIMS : Cercles translatés

WIMS : Parallèles et translation

2.2. **Symétrie centrale.** La symétrie centrale et l'identité sont les seules isométries qui conservent un parallélogramme quelconque.

2.2.1. *Définition.*

Définition 2.2. On appelle *symétrie centrale de centre* C l'application du plan affine $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à un point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$. On la note σ_C.

Sur la figure, le F vert est l'image du F bleu par la symétrie centrale de centre C. *Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.*

La figure est accessible par ce lien `http://ggbm.at/MyAisZfm`

2.2.2. *Propriétés et exercices.*

Proposition 2.2. *Voici des propriétés d'une symétrie centrale. D'autres seront établies plus loin.*

(1) *Le centre d'une symétrie centrale est le milieu du segment joignant un point M et son image M'.*

(2) *Le centre d'une symétrie centrale est son unique point fixe.*

(3) *L'inverse d'une symétrie centrale est elle-même. Une symétrie centrale est donc une involution.*

(4) *Une symétrie centrale est une isométrie.*

(5) *Soient A et B deux points distincts. L'image de la droite (AB) par une symétrie centrale est la droite passant par les images de A et de B. Elle est parallèle à (AB).*

(6) *Une symétrie centrale transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.*

Démonstration. Soit σ une symétrie centrale. On note C son centre : $\sigma = \sigma_C$.

1. Par définition, si M est un point et $M' = \sigma_C(M)$ alors : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM'}$. Le point C est le milieu de $[MM']$.

2. Le point N est un point fixe si et seulement si il vérifie : $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{CN}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{CN}$ est nul. Donc C est l'unique point fixe.

3. On a aussi $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CM'}$ donc M est l'image de $M' = \sigma_C(M)$ par σ_C. L'application σ_C est son propre inverse. On a $\sigma_C \circ \sigma_C = \mathrm{Id}$.

4. On pose $\sigma_C(A) = A'$ et $\sigma_C(B) = B'$, alors le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. On a donc : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, σ_C est une isométrie : $A'B' = AB$.

5. Soient $M \in (AB)$ et $M' = \sigma_C(M)$. Les points A, B et M sont alignés, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Alors $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont colinéaires donc A', B' et M' sont alignés. L'image de la droite (AB) par σ_C est donc contenue dans la droite $(A'B')$. De même on a : $\sigma_C(A'B') \subset (AB)$. L'image de (AB) par σ_C est donc la droite $(A'B')$ qui lui est parallèle car les vecteurs directeurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont égaux. □

Remarque. La conservation des angles orientés par une symétrie centrale est démontrée en 3.1 et les droites invariantes par une symétrie centrale sont explicitées en 4.2.

Exercices. Toutes les propriétés des symétries centrales sont utiles pour faire ces exercices. Les exercices demandent une réponse graphique.
WIMS : Symétrique d'un point (1)
WIMS : Symétrique d'un point (2)

2.3. **Réflexion.** La réflexion s'appelle "symétrie axiale" au collège.

On peut trouver les propriétés de la médiatrice d'un segment, utiles à l'étude des réflexions dans *Droites remarquables, transformations* à cette adresse WIMS : Médiatrice.

2.3.1. *Définition.*

Définition 2.3. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$. On appelle *symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$* ou *réflexion d'axe $\mathcal{D}$* , et on note $\sigma_{\mathcal{D}}$, l'application du plan affine $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que

(1) le milieu de $[MM']$ appartienne à $\mathcal{D}$
(2) la droite (MM') soit perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Sur la figure, l'axe de symétrie est représenté par un trait mixte. L'image du F bleu par la symétrie est le F vert. *Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.*

Lien pour une figure mobile : `http://ggbm.at/QPKZU3J4`

2.3.2. *Propriétés et exercices.*

Proposition 2.3. *Voici des propriétés d'une réflexion. D'autres seront établies plus loin.*

(1) Les points de $\mathcal{D}$ sont les seuls points fixes.
(2) L'inverse de $\sigma_{\mathcal{D}}$ est $\sigma_{\mathcal{D}}$.
(3) Une réflexion est une isométrie.
(4) Soient A et B deux points distincts et A' et B' leurs images respectives par $\sigma_{\mathcal{D}}$. L'image par $\sigma_{\mathcal{D}}$ de (AB) est $(A'B')$. Si deux droites sont parallèles, leurs images sont parallèles.

Démonstration. 1. Un point N est fixe si et seulement si il est confondu avec son image N' si et seulement si le segment $[NN']$ est réduit au point N qui est aussi son milieu si et seulement si N appartient à $\mathcal{D}$.

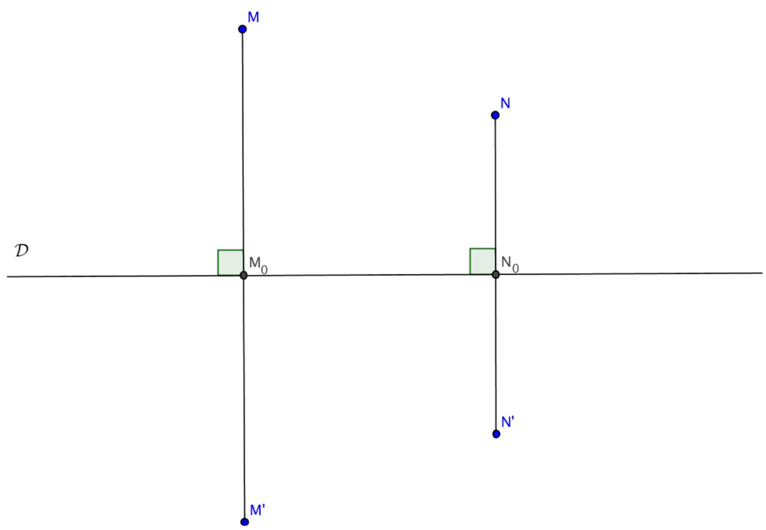
2. La définition d'une réflexion est symétrique en M et M'.

3. Soient M_0 et N_0 les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur $\mathcal{D}$, on a :

$$MN^2 = ||\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0N_0} + \overrightarrow{N_0N}||^2 = MM_0^2 + M_0N_0^2 + NN_0^2 + 2.\overrightarrow{MM_0}.\overrightarrow{NN_0}$$

De même on a : $M'N'^2 = M'M_0^2 + M_0N_0^2 + N'N_0^2 + 2.\overrightarrow{M'M_0}.\overrightarrow{N'N_0}$.

Alors de $\overrightarrow{M'M_0} = -\overrightarrow{MM_0}$ et $\overrightarrow{N'N_0} = -\overrightarrow{NN_0}$ on déduit l'égalité $M'N'^2 = MN^2$. Donc une réflexion est une isométrie.



4. On a vu qu'une isométrie conserve l'alignement donc l'image de (AB) par $\sigma_{\mathcal{D}}$ est contenue dans la droite $(A'B')$. Comme A et B sont les images de A' et B' par $\sigma_{\mathcal{D}}$, l'image de $(A'B')$ par $\sigma_{\mathcal{D}}$ est contenue dans la droite (AB), soit $\sigma_{\mathcal{D}}((A'B')) \subset (AB)$. En appliquant $\sigma_{\mathcal{D}}$ à cette inclusion, on obtient $(A'B') \subset \sigma_{\mathcal{D}}((AB))$. Comme on avait $\sigma_{\mathcal{D}}((AB)) \subset (A'B')$, on conclut à l'égalité $\sigma_{\mathcal{D}}((AB)) = (A'B')$.

Soient deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2 et Δ'_1 et Δ'_2 leurs images respectives par $\sigma_{\mathcal{D}}$. Alors Δ'_1 et Δ'_2 sont parallèles, en effet si elles étaient sécantes en un point C alors $\sigma_{\mathcal{D}}(C)$ serait commun à Δ_1 et Δ_2, ce qui est impossible. □

Remarque. Une réflexion transforme un angle orienté en son opposé (voir en 3.2). Les droites invariantes par une réflexion sont explicitées en 4.2.

Exercices. Toutes les propriétés des réflexions sont utiles pour faire ces exercices. Les exercices demandent une réponse graphique.

WIMS : Symétrique d'un point (1)
WIMS : Symétrique d'un point (2)
WIMS : Image d'un triangle par une réflexion (1)
WIMS : Image d'un triangle par une réflexion (2)
WIMS : Image d'un triangle par une réflexion (3)

2.4. **Symétrie glissée.** Quel est le type de la composée d'une translation et d'une réflexion ? Voici la réponse dans un cas particulier, quand l'axe de la réflexion est dirigé par le vecteur de la translation. Nous découvrons un nouveau type d'isométrie sans point fixe qui n'est pas une translation.

2.4.1. *Définition.*

Définition 2.4. On appelle **symétrie glissée** la composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur dirigeant l'axe de la réflexion.

Une symétrie glissée est une isométrie comme composée d'isométries.

Sur la figure, l'axe de symétrie est représenté par un trait mixte, et le vecteur est représenté en vert. L'image du F bleu par la symétrie glissée d'axe D et de vecteur u est le F vert. *Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.*

Lien pour une figure mobile : `http://ggbm.at/NSNR4ySe`

2.4.2. *Propriétés et exercice.*

Proposition 2.4. *Soit Δ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$. La symétrie glissée $\psi = \sigma_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ vérifie ces propriétés :*

(1) Les applications $t_{\vec{u}}$ et σ_Δ commutent. On a aussi $\psi = t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta$.

(2) Le carré $\psi \circ \psi$ de ψ vaut $t_{2\vec{u}}$.

(3) La décomposition $\psi = \sigma_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est unique.

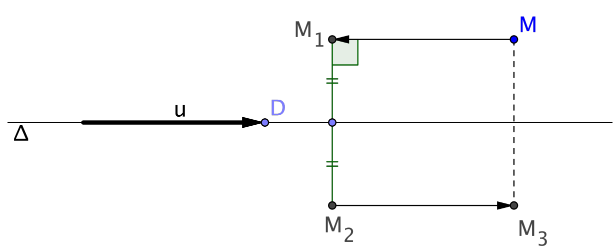
(4) L'application ψ n'admet aucun point fixe.

(5) La droite Δ est l'ensemble des milieux de $[M\psi(M)]$ pour $M \in \mathcal{P}$.

Démonstration. 1. Les applications $t_{\vec{u}}$ et σ_Δ commutent si et seulement si on a l'égalité $t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta \circ t_{-\vec{u}} = \sigma_\Delta$. Soit un point M du plan, on pose

$$M_1 = t_{-\vec{u}}(M), \quad M_2 = \sigma_\Delta(M_1) \quad \text{et} \quad M_3 = t_{\vec{u}}(M_2)\,.$$

Par l'égalité $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u} = \overrightarrow{M_2M_3}$, le quadrilatère $MM_1M_2M_3$ est un parallélogramme. Comme $\vec{u}$ dirige Δ et que (M_1M_2) est perpendiculaire à Δ, l'angle $\widehat{MM_1M_2}$ est droit donc $MM_1M_2M_3$ est un rectangle.



Alors Δ est une médiane puisque parallèle à (MM_1) et passant par le milieu de $[M_1M_2]$. Donc le milieu de $[MM_3]$ appartient à Δ et (MM_3) est perpendiculaire à Δ, ceci signifie que M_3 est le symétrique de M par rapport à Δ.

On a donc démontré $t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta \circ t_{-\vec{u}} = \sigma_\Delta$, qui est équivalent à $t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta = \sigma_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

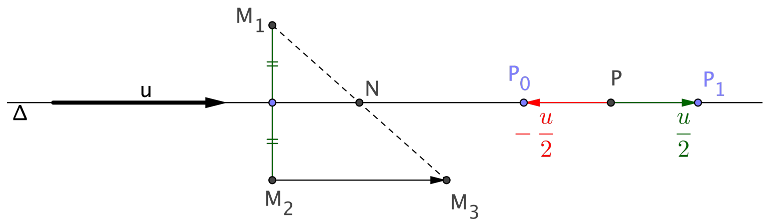
2. En utilisant (1) et le fait qu'une réflexion est involutive, on peut écrire :

$$\psi \circ \psi = t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}\,.$$

3. Le vecteur de la symétrie glissée est uniquement déterminé par l'égalité $\psi \circ \psi = t_{2\vec{u}}$; la réflexion est alors uniquement déterminée par $\sigma_\Delta = \psi \circ t_{-\vec{u}}$.

4. Comme la translation $\psi \circ \psi$ n'admet aucun point fixe, il en est de même pour ψ.

5. Sur la figure, M_3 est l'image de M_1 par ψ. La droite Δ est une droite des milieux dans le triangle $M_1M_2M_3$ puisque parallèle à la base (M_2M_3) et passant par le milieu de $[M_1M_2]$ donc elle passe par le milieu N de $[M_1M_3]$. On a donc montré que le milieu N de $[M_1\psi(M_1)]$ appartient à Δ pour tout M_1.



Réciproquement, soit P un point de Δ. On pose $P_0 = t_{-\frac{\vec{u}}{2}}(P)$ et $P_1 = t_{\vec{u}}(P_0)$. Comme P_0 appartient à Δ, il est fixe par σ_Δ donc P_1 est l'image par ψ de P_0 et P est, par construction, le milieu de $[P_0P_1]$. On a montré que tout point de Δ est le milieu d'un segment $[M\psi(M)]$ pour M point du plan.

L'assertion (5) est démontrée.

□

Exercice.

WIMS : Images de points par une symétrie glissée

2.4.3. *Remarques.*

Remarques. (1) Une symétrie glissée n'est pas une translation sinon on aurait l'égalité entre une translation et une réflexion. Une symétrie glissée n'est ni une réflexion, ni une rotation puisqu'elle n'admet aucun point fixe (voir en 2.5).

(2) Une symétrie glissée transforme un angle orienté en son opposé puisqu'elle est la composée d'une réflexion et d'une translation (voir en 3.2 et en 3.1)

(3) Les droites invariantes par une symétrie glissée sont explicitées en 4.4.

(4) En utilisant la décomposition d'une translation comme composée de réflexions d'axes parallèles (voir en 5.2.1), on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Dans le plan affine, on considère une droite Δ et un vecteur $\vec{v}$ non nul. Alors σ_Δ et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement $\vec{v}$ dirige Δ.*

2.5. **Rotation.** Nous abordons ici le dernier type d'isométrie. Nous avons déjà rencontré une rotation : une symétrie centrale est une rotation d'angle π. Nous avons déjà composé des réflexions d'axes sécants, mais seulement quand ils étaient perpendiculaires. Nous traitons ici tous les cas.

2.5.1. *Définition.*

Définition 2.5. On appelle *rotation de centre O et d'angle* θ, et on note $\rho(O,\theta)$, l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui fixe O et qui, à M distinct de O, associe M' vérifiant :

(1) $OM = OM'$

(2) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$

Exercices.
WIMS : Images de deux points par une rotation
WIMS : Image d'un triangle par une rotation

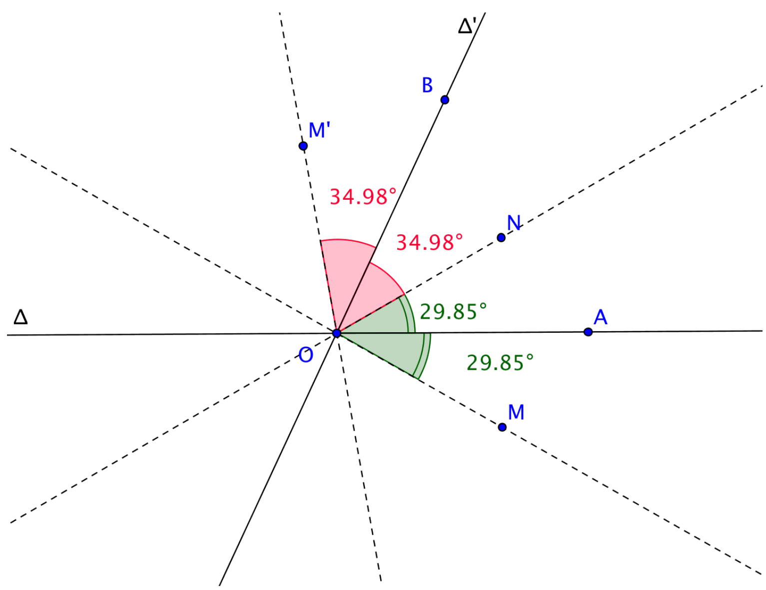
Figure mobile pour une rotation.
Sur la figure, le F vert est l'image du F bleu par une rotation d'angle α et de sens direct. *Vous pouvez déplacer tous les objets rouges.*
Lien pour une figure mobile : `http://ggbm.at/BBQucB3j`

2.5.2. *Composée de deux réflexions d'axes sécants.*

Proposition 2.6. *Soient Δ et Δ' deux droites sécantes en O alors $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\Delta, \Delta')$.*

$$\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta} = \rho(O, 2.(\Delta, \Delta'))$$

Réciproquement, si Δ est une droite donnée passant par O, on peut écrire $\rho(O, \theta)$ comme la composée $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}$ où Δ' est la droite image de Δ par la rotation de centre O et d'angle $\theta/2$: $\Delta' = \rho(O, \theta/2)(\Delta)$.



Démonstration. Remarquons d'abord que $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}$ est une isométrie qui fixe O, on a donc : $OM = OM'$ pour $M' = \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}(M)$.

Il reste à calculer l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$. On note $N = \sigma_{\Delta}(M)$ et on considère A (resp. B) un point de Δ (resp. Δ') distinct de O. Comme une réflexion transforme un angle orienté en son opposé (voir en 3.2), on peut écrire à l'aide de la relation de Chasles :

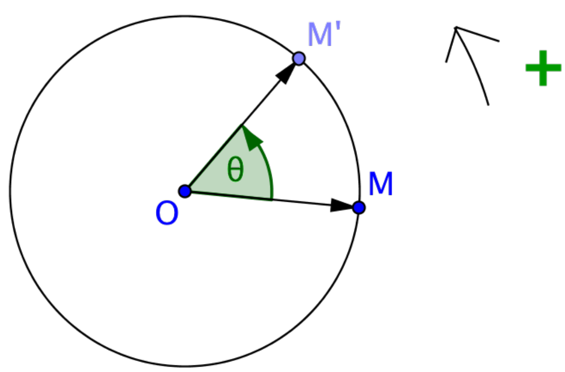
$$\begin{array}{rcl}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) & = & (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})+(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}) \\ & = & (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})+(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM'}) \\ & = & 2.(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})+2.(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB}) \\ & = & 2.(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ & = & 2(\Delta,\Delta')\end{array}$$

□

Exercice.
WIMS : Rotation : produit de réflexions

2.5.3. *Propriétés.*

Proposition 2.7. *(1) Une rotation est une isométrie.*
(2) Pour tout point O, la rotation de centre O et d'angle 0 *est l'identité.*
(3) La rotation de centre O et d'angle π *est la symétrie centrale de centre O.*
(4) La composée de $\rho(O,\theta)$ *et* $\rho(O,\theta')$ *est* $\rho(O,\theta+\theta')$.
(5) L'inverse de $\rho(O,\theta)$ *est* $\rho(O,-\theta)$.



Démonstration. (1) Une rotation est une isométrie comme composée de deux réflexions.
(2) Les égalités $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = 0$ sont équivalentes à $M = M'$ donc toute rotation d'angle nul est l'identité.
(3) Comme on a $\widehat{\vec{u},-\vec{u}} = \pi$, la rotation $\rho(O,\pi)$ est, par définition, la symétrie centrale de centre O.
(4) Posons $r = \rho(O,\theta)\circ\rho(O,\theta')$ alors r fixe O et pour M un point du plan distinct de O, posons $M' = \rho(O,\theta)(M)$ et $M'' = \rho(O,\theta')(M')$. On a alors par définition et relation de Chasles des angles orientés :
— $OM = OM' = OM''$

— $\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}} = \widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}} + \widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''}} = \theta + \theta'$

(5) se déduit de (4) ou de la définition.

□

Remarque. Comme une rotation est composée de deux reflexions, elle conserve les angles orientés (voir en 3.2). Le cas des rotations admettant une droite invariante est explicité en 4.5.

2.5.4. *Ordre d'une rotation.* Si ϕ est une application et k un entier naturel non nul, on note ϕ^k la composée de k applications égales à ϕ. Par extension, on dit ϕ^0 est l'identité.

Définition 2.6. On dit qu'une rotation ρ est d'*ordre fini* s'il existe un entier naturel k non nul tel que ρ^k est l'identité. L'*ordre* de ρ est alors le plus petit entier naturel n non nul tel que ρ^n est l'identité.

Exemples. Une involution est d'ordre 2.
La rotation $\rho(O, \frac{2\pi}{n})$ est d'ordre n.

Exercice. WIMS : Ordre d'une rotation conservant un végétal.

3. Isométries et angles

Nous allons préciser l'action des quelques isométries sur les angles géométriques ou orientés. La décomposition de isométries en produit de réflexions nous permettra de traiter toutes les isométries.

3.1. **Translations et symétries centrales.**

Proposition 3.1. *Les symétries centrales et les translations conservent les angles orientés de vecteurs.*

Démonstration. Soit ϕ une symétrie centrale ou une translation. Soient O, A et B trois points distincts et O', A' et B' leurs images respectives par ϕ.
On a vu que si ϕ est une translation, on a les égalités : $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB}$; on en déduit :

$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) .$$

Si ϕ est une symétrie centrale, on a les égalités : $\overrightarrow{O'A'} = -\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'B'} = -\overrightarrow{OB}$; on en déduit :

$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = (-\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) .$$

□

3.2. **Réflexion.**

Proposition 3.2. *Une réflexion conserve les angles géométriques et transforme un angle orienté en son opposé.*

Démonstration. Soient O, A et B trois points distincts du plan.

Si O, A et B sont alignés, comme une isométrie conserve l'alignement et l'ordre des points, une réflexion conserve l'angle nul ou l'angle plat qui sont égaux à leurs opposés.

Si O, A et B ne sont pas alignés, on considère le point C du plan tel que $OACB$ soit un parallélogramme. Un angle géométrique est caractérisé par son cosinus. Plus précisément, pour trois points non alignés O, A et B, on a :

$$\cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB}$$

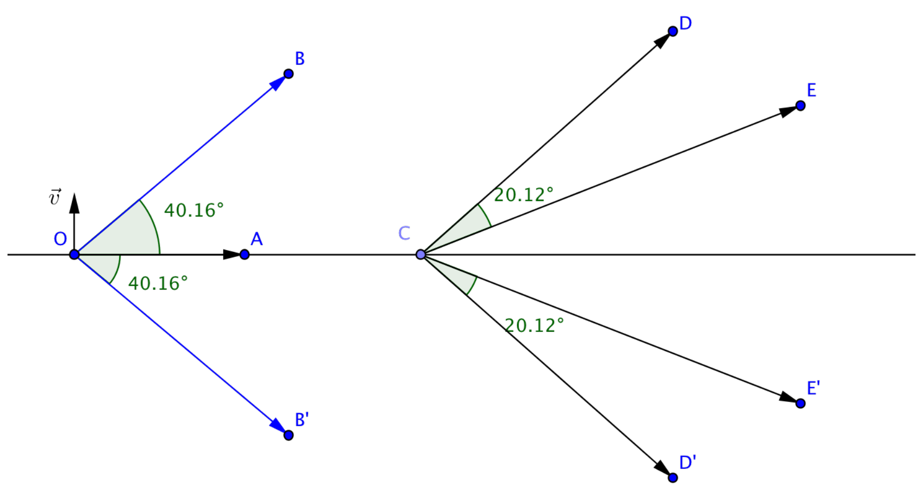
Nous allons montrer qu'une réflexion conserve le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et de ce fait elle conservera les angles géométriques.

Comme la réflexion transforme des droites parallèles en des droites parallèles, elle transforme $OACB$ en un parallélogramme $O'A'C'B'$. Comme $\overrightarrow{OC}$ vaut $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (de même $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}$), en développant $||\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}||^2$ et $||\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}||^2$, on obtient :

$$2.\overrightarrow{O'A'}.\overrightarrow{O'B'} = O'C'^2 - O'A'^2 - O'B'^2 = OC^2 - OA^2 - OB^2 = 2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$$

puisque la réflexion est une isométrie. On a donc montré qu'une réflexion conserve le cosinus donc les angles géométriques.

Maintenant voyons comment une réflexion agit sur un angle orienté. On vient de voir qu'elle conserve l'angle géométrique, c'est-à-dire la valeur absolue de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. Le plan étant orienté par un repère direct $(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||}, \vec{v})$, comme B et $B' = \sigma_{(OA)}(B)$ sont de part et d'autre de (OA), les angles $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'})$ sont de signes contraires.



Pour un angle quelconque, on met son sommet sur l'axe (par une translation qui conserve les angles orientés) et on utilise la relation de Chasles. Avec les notations de la figure et le résultat précédent, on peut écrire :

$$(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}) = -(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD'}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE'}) = -(\overrightarrow{CE'},\overrightarrow{CD'})$$

□

Remarque. Si ϕ est une isométrie composée de deux réflexions, alors elle conserve les angles orientés. En effet la première réflexion transforme l'angle orienté en son opposé et la seconde en l'opposé de l'opposé donc en lui-même.

3.3. **Exercices.** Ces trois exercices testent les propriétés de certaines isométries.

(1) Test des translations, symétries centrales et réflexions :
WIMS : Propriétés d'une isométrie (1)

(2) Test des translations, symétries centrales, réflexions et symétries glissées :
WIMS : Propriétés d'une isométrie (2)

(3) Test des translations, symétries centrales, réflexions, symétries glissées et rotations :
WIMS : Propriétés d'une isométrie (3)

4. Droites invariantes par des isométries

Nous déterminons dans cette partie quelles droites sont invariantes par chaque type d'isométrie.

Définition 4.1. On dit qu'une droite est *invariante par une isométrie* ϕ , si elle est égale à son image par ϕ.

On a vu que l'image d'une droite (AB) par ϕ est la droite $(\phi(A)\phi(B))$; pour décider si (AB) est invariante, il suffit donc de chercher à quelle condition $\phi(A)$ et $\phi(B)$ appartiennent à (AB).

Remarque. Une droite fixe point par point est invariante, la réciproque est fausse. Ceci est illustré par l'exemple de la translation qui n'a aucun point fixe mais une infinité de droites invariantes.

4.1. **Translation.**

Proposition 4.1. *Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul.*
Une droite $\mathcal{D}$ est invariante par $t_{\vec{u}}$ si et seulement si elle est dirigée par $\vec{u}$.

Démonstration. Soit une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ alors si M appartient à $\mathcal{D}$, le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ appartient à $\mathcal{D}$ puisqu'on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\mathcal{D}$ est invariante.

Réciproquement, si une droite (AB) est invariante par $t_{\vec{u}}$, alors $A' = t_{\vec{u}}(A)$ appartient à (AB) et le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ dirige (AB). □

4.2. **Symétrie centrale.**

Proposition 4.2. *Les droites invariantes par une symétrie centrale sont les droites passant par son centre.*

Démonstration. Soit C un point du plan. Pour tout M un point du plan, on note $M' = \sigma_C(M)$ alors C appartient à la droite (MM'). Donc les droites invariantes par σ_C sont celles passant par C. □

4.3. **Réflexion.**

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Les droites invariantes par $\sigma_{\mathcal{D}}$ sont $\mathcal{D}$ et les droites perpendiculaires à $\mathcal{D}$.*

Démonstration. La droite $\mathcal{D}$ est invariante par $\sigma_{\mathcal{D}}$ puisque fixe point par point.

Soit une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$ et B un point de $\mathcal{D}'$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et B' son image $\sigma_{\mathcal{D}}(B)$.

Si $\mathcal{D}'$ est invariante par $\sigma_{\mathcal{D}}$, alors B' appartient à $\mathcal{D}'$ qui est donc confondue avec (BB') et, par définition de $\sigma_{\mathcal{D}}$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$

Réciproquement, si $\mathcal{D}'$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$, par définition, pour tout B de $\mathcal{D}'$, son image B' appartient à $\mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}'$ est invariante. □

4.4. **Symétrie glissée.**

Proposition 4.4. *La seule droite invariante par la symétrie glissée $\sigma_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$ (avec $\vec{u}$ vecteur non nul dirigeant $\mathcal{D}$) est son axe $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Si la droite Δ est invariante par $\psi = \sigma_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$ alors elle est invariante par $\psi \circ \psi = t_{2\vec{u}}$ donc elle est dirigée par $\vec{u}$ et invariante par $\sigma_{\mathcal{D}}$. C'est donc l'axe $\mathcal{D}$ de ψ et cet axe est évidemment invariant. □

4.5. **Rotation.**

Proposition 4.5.
Une rotation qui admet une droite invariante est une symétrie centrale ou l'identité.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Comme en 2.5.2, décomposons $\rho(O,\theta)$ en produit de réflexions : $\sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ avec $\theta = 2.(\mathcal{D},\Delta)$. Si la droite $\mathcal{D}$ est invariante par $\rho(O,\theta)$, alors, comme elle est fixe par $\sigma_{\mathcal{D}}$, elle est invariante par σ_{Δ}. Deux cas peuvent se présenter :

(1) La droite $\mathcal{D}$ est confondue avec Δ et $\rho(O,\theta) = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est l'identité.

(2) La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à Δ et $\rho(O,\theta)$ est une symétrie centrale comme composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires.

□

5. Composées d'isométries

On rassemble ici les résultats concernant la composée de deux isométries. On verra en 7.1 ce qu'est un groupe. Ces résultats peuvent être démontrés en utilisant l'écriture complexe des transformations (voir le document WIMS : Géométrie du plan complexe).

5.1. **Groupe des translations et symétries centrales.**

5.1.1. *Proposition.*

Proposition 5.1. *L'ensemble $ST(\mathcal{P})$ des translations et symétries centrales muni de la composition est un groupe non commutatif. Plus précisément, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs et A, B et C des points, on a démontré :*

(1) La composition est une loi interne non commutative :

(i) La composée de deux translations est une translation :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$$

(ii) La composée de deux symétries centrales est une translation :

$$\sigma_B \circ \sigma_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$$

(iii) La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

$$\sigma_C \circ t_{\vec{u}} = \sigma_D \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u}$$

$$t_{\vec{u}} \circ \sigma_C = \sigma_E \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

On remarque que $\sigma_C \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ \sigma_C$ sont différents si $\vec{u}$ est non nul.

(2) L'élément neutre est l'application identique du plan affine noté $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$: $t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

(3) L'inverse de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$ et σ_A est son propre inverse.

La démonstration est à la page suivante. Ensuite, une remarque donne des astuces pour mémoriser ces résultats.

5.1.2. *Démonstration du 1 de la proposition.*

(i) Pour un point M quelconque du plan, on note M' l'image de M par $t_{\vec{u}}$ et M'' celle de M' par $t_{\vec{v}}$. Alors, par définition, on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$, on obtient par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}\ .$$

L'application $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ qui à M associe M'' est donc $t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

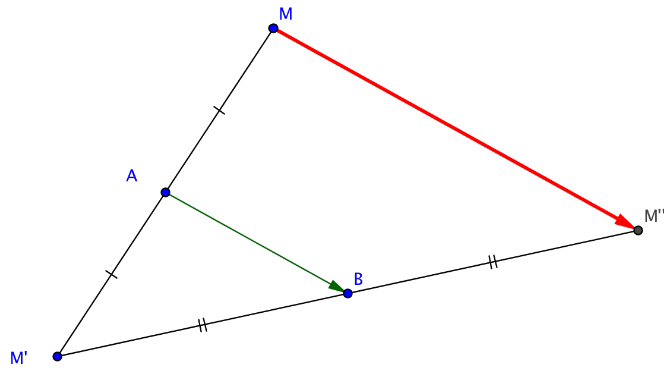
(ii) Pour un point M quelconque du plan, on note M' l'image de M par σ_A et M'' celle de M' par σ_B. Alors, par définition, on a : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'B}$, on obtient par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B}) = 2\overrightarrow{AB}\,.$$

L'application $\sigma_B \circ \sigma_A$ qui à M associe M'' est donc $t_{2\overrightarrow{AB}}$.

Figure : composée de deux symétries centrales.

La figure mobile est dans le document WIMS : Isométries du plan à cette page WIMS : figure.

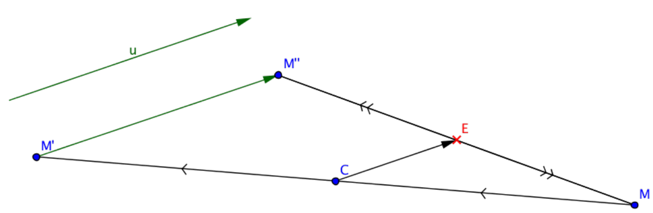


(iii) D'après (b), le point D vérifiant $\sigma_C \circ \sigma_D = t_{\vec{u}}$ est le point D défini par $\overrightarrow{DC} = \frac{\vec{u}}{2}$, c'est-à-dire $D = t_{-\frac{\vec{u}}{2}}(C)$. En composant à droite par σ_C l'égalité $\sigma_C \circ \sigma_D = t_{\vec{u}}$, on obtient $\sigma_C \circ t_{\vec{u}} = \sigma_D \quad avec \quad \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

Comme $t_{\vec{u}} \circ \sigma_C$ est l'inverse de $\sigma_C \circ t_{-\vec{u}}$, la symétrie centrale $t_{\vec{u}} \circ \sigma_C$ a pour centre E avec $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

Figure : composée d'une symétrie centrale et d'une translation.

La figure mobile est dans le document WIMS : Isométries du plan à cette page WIMS : figure.



5.1.3. *Remarque. Comment mémoriser les éléments caractéristiques des composées ?*

Quand on se souvient que la composée $\sigma_B \circ \sigma_A$ est une translation, il suffit d'appliquer $\sigma_B \circ \sigma_A$ à A pour obtenir le vecteur de la translation composée :

$$\sigma_B \circ \sigma_A(A) = \sigma_B(A) = A' \quad et \quad \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$$

Quand on se souvient que la composée $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$ est une symétrie centrale, il suffit d'appliquer $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$ à A pour obtenir le centre C de la symétrie composée :

$$t_{\vec{u}} \circ \sigma_A(A) = t_{\vec{u}}(A) = A' \quad et \quad \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$$

Alors C est le milieu de $[AA']$, c'est-à-dire C est égal à $t_{\vec{u}/2}(A)$.

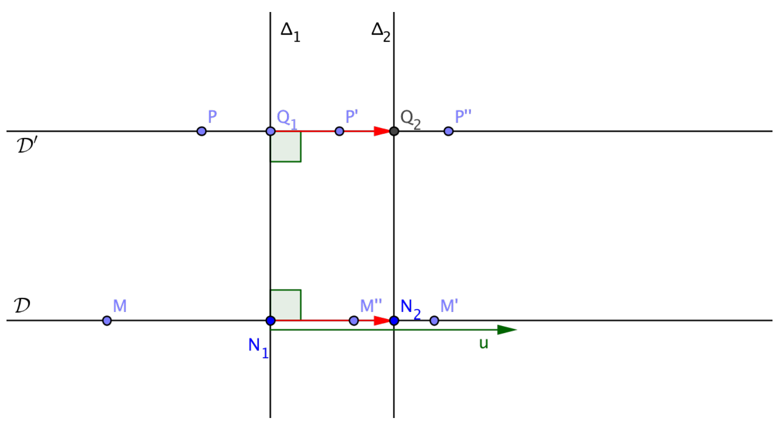
Ces résultats suivants sont utiles pour déterminer la composée de deux isométries. Il suffit, en effet, de les décomposer en produit de réflexions bien choisies pour que la composée se simplifie. On trouvera des exemples en 5.3 et en 6.3.

5.2. **Composée de deux réflexions.** Selon que les axes des deux réflexions sont parallèles ou non, la composée sera une translation ou une rotation.

5.2.1. *Les axes sont parallèles.*

Proposition 5.2. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles et $\mathcal{D}$ une perpendiculaire commune à Δ_1 en N_1 et à Δ_2 en N_2. La composée $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ est la translation de vecteur $2.\overrightarrow{N_1N_2}$.*

Soit une translation de vecteur $\vec{u}$ et Δ une droite quelconque orthogonale à $\vec{u}$. Alors on peut décomposer $t_{\vec{u}}$ en produit de deux réflexions $t_{\vec{u}} = \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}$ où Δ' est l'image de Δ par la translation $t_{\vec{u}/2}$: $\Delta' = t_{\vec{u}/2}(\Delta)$



Démonstration. Soit M un point du plan, N_1 et N_2 ses projetés orthogonaux sur Δ_1 et Δ_2. On note $M' = \sigma_{\Delta_1}(M)$ et $M'' = \sigma_{\Delta_2}(M')$. Alors, par définition de la projection et de la réflexion, les points M, M', M'', N_1 et N_2 sont alignés sur la perpendiculaire commune $\mathcal{D}$ à Δ_1 et Δ_2 passant par M. La restriction de $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ à $\mathcal{D}$ est égale à $\sigma_{N_2} \circ \sigma_{N_1}$, c'est-à-dire à la translation de vecteur $2.\overrightarrow{N_1N_2}$.

Pour une autre perpendiculaire commune $\mathcal{D}'$ à Δ_1 et Δ_2 passant par un point P, la restriction de $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ à $\mathcal{D}'$ est égale à la translation de vecteur $2.\overrightarrow{Q_1Q_2}$ (avec les notations de la figure).

Comme les côtés opposés de $N_1N_2Q_2Q_1$ sont parallèles, $N_1N_2Q_2Q_1$ est un parallélogramme donc les vecteurs $\overrightarrow{N_1N_2}$ et $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ sont égaux. On a donc montré que $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ est égale à la translation de vecteur $2.\overrightarrow{N_1N_2}$ et que ce vecteur ne dépend pas de la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2. □

Remarque. On peut donc écrire une symétrie glissée comme composée de trois réflexions.

5.2.2. *Les axes sont sécants.*

Proposition 5.3. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites perpendiculaires et A leur point d'intersection. La composée $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ est la symétrie centrale de centre A. Elle est égale à $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2}$.*

Démonstration. Ce résultat est un cas particulier de cette proposition 2.5.2. On peut aussi le démontrer directement en se plaçant dans le cas particulier où les axes des réflexions sont les axes de coordonnées. □

On rappelle cette proposition vue en 2.5.2.

Proposition 5.4. *La composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation. Toute rotation peut se decomposer comme produit de deux réflexions dont l'une est donnée.*

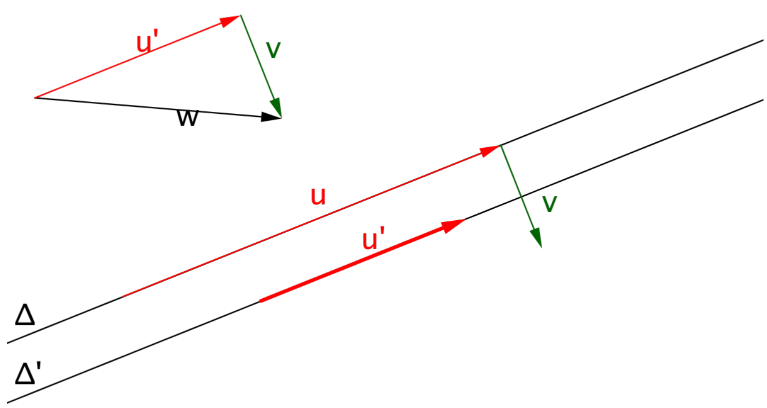
5.3. **Composée d'une réflexion et d'une translation.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons un vecteur $\vec{w}$ et une droite Δ dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Le but de cette partie est de déterminer l'isométrie $\varphi = t_{\vec{w}} \circ \sigma_\Delta$.

Décomposons le vecteur $\vec{w}$ selon la direction de Δ et la direction orthogonale, c'est-à-dire écrivons $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ où λ est un réel et $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$. Cette décomposition est unique. Posons $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$.

La décomposition d'une translation vue en 5.2.1 nous donne : $t_{\vec{v}} = \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta$ avec $\Delta' = t_{\vec{v}/2}(\Delta)$. On en déduit :

$$\varphi = t_{\vec{w}} \circ \sigma_\Delta = t_{\vec{u}'} \circ t_{\vec{v}} \circ \sigma_\Delta = t_{\vec{u}'} \circ (\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta) \circ \sigma_\Delta = t_{\vec{u}'} \circ \sigma_{\Delta'}\,.$$

Comme la droite Δ' est parallèle à Δ dirigée par $\vec{u}$, l'isométrie φ est une symétrie glissée d'axe Δ' et de vecteur $\vec{u}'$.



Exercices. Ces exercices sont des applications directes de cette étude.

WIMS : Composition translation et réflexion (1) (exercice graphique)
WIMS : Composition translation et réflexion (2) (exercice graphique)
WIMS : Composée translation et réflexion (3) (exercice graphique)
WIMS : Composée d'une réflexion et d'une translation (1) (version analytique)
WIMS : Composée d'une réflexion et d'une translation (2) (version analytique)

5.4. **Principe de conjugaison.** Le principe de conjugaison est utile pour décider si deux isométries commutent ou non. Dans ce cadre, on compose trois isométries.

5.4.1. *Définitions et propriétés.*

Définition 5.1. Soient f et g des applications. On appelle *conjugué de g par f* l'application $f \circ g \circ f^{-1}$.

Remarque. Si $\psi = f \circ g \circ f^{-1}$ est le conjugué de g par f, alors g est le conjugué de ψ par f^{-1}. Il suffit d'écrire :

$$f^{-1} \circ \psi \circ f = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f^{-1}) \circ f = (f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f^{-1} \circ f) = g$$

Proposition 5.5 (Points fixes)**.** *Les points fixes de $f \circ g \circ f^{-1}$ sont les images par f des points fixes de g.*

Démonstration. Posons $\psi = f \circ g \circ f^{-1}$. Notons $Fixes(g)$ (resp. $Fixes(\psi)$ l'ensemble des points fixes de g (resp. ψ). Nous voulons montrer l'égalité : $Fixes(\psi) = f(Fixes(g))$.

Soit C un point fixe de g. Par un calcul direct, on constate que l'image de $f(C)$ par ψ est $f(C)$. Donc nous avons montré l'inclusion $f(Fixes(g)) \subset Fixes(\psi)$.

Appliquons ce résultat à g qui est le conjugué de de ψ par f^{-1}. Nous obtenons l'inclusion $f^{-1}(Fixes(\psi)) \subset Fixes(g)$, c'est-à-dire $Fixes(\psi) \subset f(Fixes(g))$.

Les deux inclusions donnent l'égalité attendue. □

Proposition 5.6. *Le conjugué d'une involution est une involution.*

Démonstration. Si s est une involution, alors, comme $s \circ s$ est égal à l'identité, on a :

$$(f \circ s \circ f^{-1}) \circ (f \circ s \circ f^{-1}) = f \circ s \circ (f^{-1} \circ f) \circ s \circ f^{-1} = f \circ (s \circ s) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$$

□

Ces propriétés suggèrent le *principe de conjugaison* :

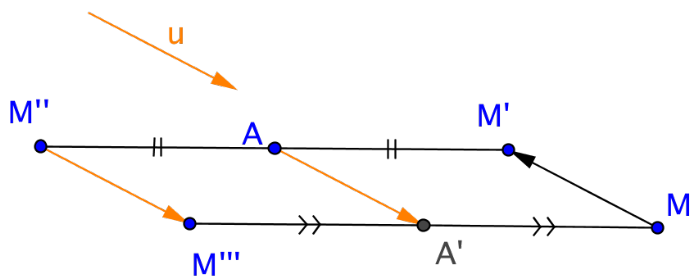
Corollaire 5.7 (Principe de conjugaison)**.** *Le conjugué d'une isométrie g est une isométrie de même type que g dont les éléments caractéristiques sont les "images par f" de ceux de g.*

Ce résultat doit être démontré dans chaque cas. Comme on connaît le type du conjugué, la démonstration s'avère plus facile.

En effet, dans la plupart des cas, le nombre de points fixes caractérise le type d'une isométrie dès qu'on sait si elle est positive ou négative (voir en 7.3 et en 7.4). Une isométrie et sa conjuguée ont même nombre de points fixes et même "signe". Seul le cas des rotations demande un peu plus de travail.

5.4.2. *Applications.*

Exemple. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan. L'isométrie $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A \circ t_{-\vec{u}}$ la symétrie centrale de centre $t_{\vec{u}}(A)$.



Démonstration. Première méthode. On sait que la composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale donc $\sigma_A \circ t_{-\vec{u}}$ est une symétrie centrale qui composée avec $t_{\vec{u}}$ donne une autre symétrie centrale dont le centre est son unique point fixe $t_{\vec{u}}(A)$.

Deuxième méthode. Quand on connaît la classification des isométries (voir en 7.4, on sait que $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A \circ t_{-\vec{u}}$ est une isométrie positive, de plus c'est une involution avec comme unique point fixe est $t_{\vec{u}}(A)$, $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A \circ t_{-\vec{u}}$ est donc la symétrie centrale de centre $t_{\vec{u}}(A)$. □

Exemple. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'isométrie $t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est un antidéplacement qui fixe point par point la droite $\Delta' = t_{\vec{u}}(\Delta)$, c'est donc la réflexion d'axe Δ'.

On pouvait aussi conclure en utilisant simplement le lemme 2 du théorème de décomposition. Comme $t_{\vec{u}} \circ \sigma_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ admet au moins deux points fixes (des points de Δ') et n'est pas l'identité, elle est la réflexion d'axe Δ'.

Remarque. Le principe de conjugaison est très utile dans les questions de commutation. Il est clair que deux applications f et g commutent si et seulement si le conjugué de g par f est l'application g.

Par exemple, puisque $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A \circ t_{-\vec{u}}$ est la symétrie centrale de centre $t_{\vec{u}}(A)$, une translation et une symétrie centrale ne commutent pas sauf si le vecteur de la translation est nul.

6. Décomposition en produit de réflexions.

L'identité est composée de zéro réflexion par convention. Les translations et les rotations sont composées de deux réflexions. Les réflexions sont composées d'une seule réflexion et les symétries glissées de trois (on décompose la translation en produit de deux réflexions.).

Le théorème présenté ici affirme que toute isométrie peut être décomposée en produit de réflexions. Il a une grande importance théorique (voir les propriétés des isométries en 7.2) mais aussi pratique (voir l'exemple en 5.3 et l'application en 6.3).

A la suite de ce théorème, nous admettons que nous avons ainsi vu tous les types d'isométries.

6.1. **Théorème.**

Théorème 6.1. *Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois réflexions.*

La démonstration se déroule en plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Si une isométrie φ fixe trois points non alignés A, B et C, alors φ est l'identité.*

Démonstration. En effet si $M' = \varphi(M)$ est distinct de M alors puisque φ est une isométrie, on a : $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$, les trois points A, B et C sont donc alignés sur la médiatrice de $[MM']$. □

Remarque. Ce lemme pourrait s'énoncer ainsi : Soit φ une isométrie fixant trois points A, B et C. Si A, B et C ne sont pas alignés, alors φ est l'identité. On a démontré la contraposée de cette proposition : Si φ n'est pas l'identité alors A, B et C sont alignés sur la médiatrice de $[M\varphi(M)]$ pour $M \neq \varphi(M)$.

Parmi les isométries que nous connaissons, celles qui ont trois points fixes distincts sont des réflexions. L'axe d'une réflexion σ est de fait la médiatrice de $[M\sigma(M)]$ pour $M \neq \sigma(M)$.

Lemme 2. *Si une isométrie φ fixe deux points A et B, mais pas trois points non alignés alors φ est $\sigma_{(AB)}$.*

Démonstration. En effet soit C n'appartenant pas à la droite (AB) tel que $C' = \varphi(C)$ soit distinct de C, alors comme φ est une isométrie et que A et B sont fixes par φ, on a : $AC = AC'$ et $BC = BC'$ donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$. L'application $\sigma_{(AB)} \circ \varphi$ fixe trois points non alignés A, B et C, c'est donc l'identité et φ égale $\sigma_{(AB)}$. □

Lemme 3. *Si une isométrie φ admet un unique point fixe A, alors φ est une rotation de centre A, composée de deux réflexions.*

Démonstration. En effet soit B distinct de A et B' son image par φ (distincte de B par hypothèse). Comme φ est une isométrie, A appartient à la médiatrice Δ de $[BB']$. Alors $\sigma_\Delta \circ \varphi$ fixe A et B (deux points distincts) donc cette isométrie est l'identité (impossible car φ serait une réflexion) ou une réflexion d'axe (AB). Donc φ la composée de deux réflexions d'axes passant par A, φ est une rotation de centre A. □

Lemme 4. *Si une isométrie φ n'admet aucun point fixe, elle est composée d'au plus trois réflexions.*

Démonstration. Soit A et son image $A' \neq A$ et Δ la médiatrice de $[AA']$. Alors $\sigma_\Delta \circ \varphi$ fixe A donc est composée d'au plus deux réflexions. □

6.2. **Remarque.** Nous avons déterminé les types des composées de deux réflexions en 5.2.

Pour décrire les composées de trois réflexions, nous allons commencer par admettre la proposition suivante.

Proposition 6.2. *Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites du plan. La composée de trois réflexions $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_3}$ est une réflexion si et seulement si les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont parallèles ou concourantes.*

Une fois ce résultat admis, pour déterminer la composée de trois réflexions, il reste à considérer deux cas :

(1) deux des axes sont parallèles alors à l'aide du principe de conjugaison (voir en 5.4), on se ramène à la composée d'une translation et d'une reflexion, exemple traité en 5.3 ;

(2) les trois axes portent les côtés d'un triangle et on se ramène à l'exercice WIMS proposé en 6.3.

Nous admettrons donc que la composée de trois réflexions est soit une réflexion, soit une symétrie glissée.

6.3. **Application.** Pour simplifier la composée de deux déplacements, il est souvent utile de décomposer chaque isométrie comme produit de deux ou trois réflexions bien choisies. Voici un exemple.

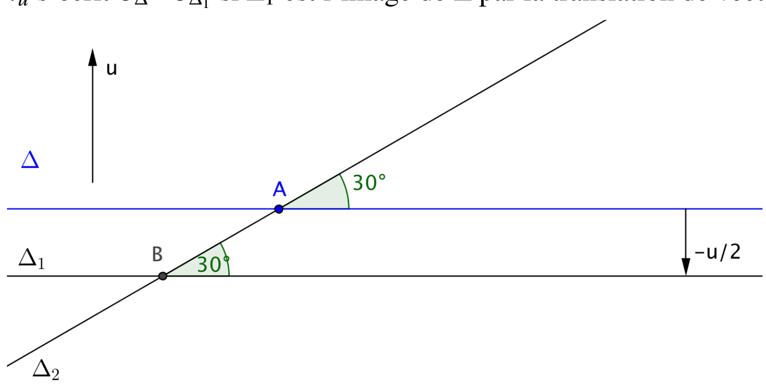
Exemple. Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point A. On veut déterminer $\psi = \rho(A, \pi/3) \circ t_{\vec{u}}$.

Quel est le type de ψ ? L'isométrie ψ est un déplacement comme composée de déplacements (voir en 7.3). Ce n'est pas une translation sinon $\rho(A, \pi/3)$ serait une translation ! C'est donc une rotation.

Pour décomposer $\rho(A, \pi/3)$ en réflexions, nous devons utiliser des réflexions d'axes passant par A. Pour décomposer $t_{\vec{u}}$ en réflexions, nous devons utiliser des réflexions d'axes orthogonaux à $\vec{u}$. Soit donc Δ la droite passant par A et orthogonale à $\vec{u}$.

Alors $\rho(A, \pi/3)$ s'écrit $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta}$ si Δ_2 est la droite passant par A et telle que l'angle (Δ, Δ_2) soit égal à $\pi/6$.

Alors $t_{\vec{u}}$ s'écrit $\sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Delta_1}$ si Δ_1 est l'image de Δ par la translation de vecteur $-\frac{\vec{u}}{2}$.



On peut maintenant calculer ψ :

$$\psi = \rho(A, \pi/3) \circ t_{\vec{u}} = \sigma_{\Delta_2} \circ (\sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Delta}) \circ \sigma_{\Delta_1} = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$$

Comme Δ_1 est parallèle à Δ, les droites Δ_2 et Δ_1 sont sécantes en un point nommé B et ψ est la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$.

Exercice. Cet exercice propose le cas plus simple de la composée d'une rotation et d'une réflexion.
WIMS : Composée rotation - réflexion (exercice graphique)

7. CLASSIFICATION

Dans cette partie, les isométries sont présentées en groupe et classées selon leurs propriétés (action sur les angles, points fixes et droites invariantes). Commençons donc par définir le sens mathématique du mot *groupe*.

7.1. Groupe.

Tout au long de l'enseignement secondaire, on rencontre des groupes sans le savoir ... voir en 7.1.2 !

7.1.1. *Définition.*

Définition 7.1. On appelle *groupe G* un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$ (une application qui à deux éléments de G associe un élément de G) tels que :

(1) La loi $\star$ soit associative : pour tous g_1, g_2 et g_3 éléments du groupe, on a :

$$(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$$

(2) Il existe dans G un élément neutre e pour la loi $\star$:
Pour tout $g \in G$, $e \star g = g \star e = g$

(3) Tout élément g a un inverse g^{-1} (appelé aussi symétrique quand le groupe est commutatif) tel que $g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = e$.

Si la loi est commutative pour les éléments de G, on dit que le groupe est *commutatif*.

Remarques. (1) L'addition de nombres réels est commutative.

(2) La loi de composition des applications est associative mais non commutative en général.

7.1.2. *Exemples de groupes de nombres.*

Voici quelques exemples de groupes numériques.
- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe. Un entier non nul n'a pas de symétrique pour l'addition dans $\mathbb{N}$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
- $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif.
- $(\mathbb{Z}^*, \times)$ n'est pas un groupe.
- $(\{1, -1\}, \times)$ est un groupe commutatif.
- $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

7.1.3. *Exemples de groupes en géométrie.*

Exemple. Si σ est une réflexion du plan, l'ensemble $\{\mathrm{Id}, \sigma\}$ est un groupe. En effet σ est son propre inverse.

Les propriétés vues en 5.1 nous donnent deux autres groupes.

Exemple. Les translations forment un groupe commutatif pour la loi de composition. Ce groupe, noté $(T(\mathcal{P}),\circ)$, est isomorphe au groupe additif des vecteurs.

Exemple. L'ensemble $ST(\mathcal{P})$ muni de la composition est un groupe non commutatif.

7.2. **Groupe des isométries.**

Théorème 7.1. *On note $Is(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries du plan $\mathcal{P}$. Alors $(Is(\mathcal{P}),\circ)$ est un groupe non commutatif.*

Démonstration. Vérifions les trois axiomes d'un groupe.

— La composition est associative, montrons que c'est une loi interne dans l'ensemble des isométries. La composée de deux isométries est une isométrie. En effet, si ϕ et ψ sont deux isométries du plan et M et N deux points quelconques alors la longueur MN est conservée par $\psi\circ\phi$:

$$(\psi\circ\phi)(M)(\psi\circ\phi)(N) = \psi[\phi(M)]\psi[\phi(N)] = \phi(M)\phi(N) = MN\,.$$

La loi de composition $\circ$ est donc interne dans $Is(\mathcal{P})$ mais non commutative, par exemple, deux symétries centrales ne commutent pas.

— L'identité est une isométrie.

— Toute isométrie a un inverse qui est une isométrie comme composée de réflexion. Par exemple, si Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont des droites, l'inverse de $\sigma_{\Delta_3}\circ\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_1}$ est $\sigma_{\Delta_1}\circ\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_3}$ en effet on calcule en utilisant l'associativité et le fait qu'une réflexion est involutive :

$$\begin{aligned}(\sigma_{\Delta_3}\circ\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_1})\circ(\sigma_{\Delta_1}\circ\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_3}) &= \sigma_{\Delta_3}\circ\sigma_{\Delta_2}\circ(\sigma_{\Delta_1}\circ\sigma_{\Delta_1})\circ\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_3}\\ &= \sigma_{\Delta_3}\circ(\sigma_{\Delta_2}\circ\sigma_{\Delta_2})\circ\sigma_{\Delta_3}\\ &= \sigma_{\Delta_3}\circ\sigma_{\Delta_3}\\ &= \mathrm{Id}\end{aligned}$$

□

Proposition 7.2. *Une isométrie transforme une droite en une droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles et conserve le produit scalaire, les angles géométriques et les milieux.*

Démonstration. Ces propriétés sont vérifiées par toutes les isométries puisqu'elles le sont par les réflexions et donc par leurs composées. □

7.3. **Isométries et angles orientés.** La proposition suivante résulte du fait qu'une réflexion change un angle orienté en son opposé (voir en 3.2).

Proposition 7.3. *Une composée d'un nombre pair de réflexions conserve les angles orientés. Une composée d'un nombre impair de réflexions change un angle orienté en son opposé.*

La parité du nombre de réflexions dans la décomposition d'une isométrie ne dépend donc pas de la décomposition.

Définition 7.2. On dit qu'une isométrie est un *déplacement* ou une *isométrie positive* si elle conserve les angles orientés.

Sinon on dit que c'est un *antidéplacement* ou une *isométrie négative*.

Corollaire 7.4.
— *Un déplacement est une isométrie composée d'un nombre pair de réflexions.*
— *Un antidéplacement est une isométrie composée d'un nombre impair de réflexions.*
— *La composée de deux déplacements est un déplacement.*
— *La composée de deux antidéplacements est un déplacement.*
— *La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.*

On en déduit la première affirmation de la proposition suivante ; la deuxième affirmation résulte des propriétés vues en 2.5.3.

Proposition 7.5. *On note $Is^+(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries positives du plan $\mathcal{P}$. Alors $(Is^+(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe non commutatif.*

Soit C un point, $(Is^+_C(\mathcal{P})$ l'ensemble des rotations de centre C muni de la composition est un groupe commutatif.

7.4. **Caractérisation des isométries.**

Les déplacements du plan sont
— les translations, isométries sans point fixe, avec une infinité de droites invariantes,
— les symétries centrales, isométries involutives avec un unique point fixe et une infinité de droites invariantes,
— les rotations d'angle distinct de 0 et π, isométries avec un unique point fixe et sans droite invariante.

Les antidéplacements du plan sont
— les réflexions, isométries involutives avec une droite de points fixes et une infinité de droites invariantes,
— les symétries glissées, isométries sans point fixe et avec une seule droite invariante.

Exercices. Ces exercices nécessitent de bien connaître les caractéristiques de chaque type d'isométrie et leur classification.

WIMS : Devinez le type d'une isométrie affine (exercice graphique)
WIMS : Type d'une composée
WIMS : Droites invariantes
WIMS : Propriétés d'une isométrie
WIMS : Reconnaître une isométrie selon ses points fixes, droites invariantes ...

8. FAISONS AGIR DES ISOMÉTRIES

Pour appliquer les résultats de ce cours et entrer plus avant dans ces notions, il est intéressant de faire agir et de reconnaître les isométries sur des objets un peu riches.

8.1. **Frises et isométries.** Quand on connaît les translations, symétries centrales, réflexions et symétries glissées et leurs droites invariantes, qu'on sait les composer, on est outillé pour étudier les isométries d'une frise. Cette étude est l'objet du document WIMS : Frises et isométries. De nombreux exercices sont proposés.

8.2. **Polygones et isométries.** Quand on connaît les rotations et les réflexions et qu'on sait les composer, on est outillé pour étudier les polygones réguliers.

Le livre de Daniel Perrin, *Mathématiques d'école* [1] présente une étude complète des polygones réguliers, du groupe de leurs isométries et de leur construction à la règle et au compas. On peut consulter aussi le document WIMS : Polygones convexes réguliers.

8.3. **Pavage et isométries.** On peut aussi faire agir les isométries sur des pavages. Consultez le document WIMS : Frises et pavages.

1. *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie* publié par Editions Cassini (402 p. ISBN 978-2-84225-158-1)